1 (*Andalucía 2008*).- Un satélite del sistema de posicionamiento GPS, de 1200 kg de masa, se encuentra en una órbita circular de radio $3 \cdot R_T$.

a) Calcula la variación que ha experimentado el peso del satélite respecto del que tenía en la superficie terrestre.

$$P_o = m\,g_o \qquad g_o = G\frac{M_T}{R_T^{\,2}}$$

$$P = m\,g \qquad g = G\frac{M_T}{R^2} = G\frac{M_T}{3^2 R_T^{\,2}} = G\frac{M_T}{9R_T^{\,2}} = \frac{g_o}{9}$$

$$\Rightarrow \qquad P = P_o/9$$

b) Determina la velocidad orbital del satélite y razona si la órbita descrita es geoestacionaria.

$$\left|\vec{F}_G\right| = \left|\vec{F}_C\right| \quad \Rightarrow \quad G\frac{M_T m}{R^2} = m\frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{3R_T}} = 4565{,}5\ m/s$$

$$v = \frac{2\pi R}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi \cdot 3 \cdot 6{,}4 \cdot 10^6}{4565{,}5} = 26423{,}65\ \text{s} = 7{,}34\ h$$

La órbita no es geoestacionaria. (Para serlo, T tendría que valer 24 h)

2 (*Aragón 2008*).- Un satélite de 100 kg de masa describe una órbita circular, sobre el ecuador terrestre, a una distancia tal que su período orbital coincide con el de rotación de la Tierra (órbita geoestacionaria). Calcula el radio de la órbita, la energía mínima necesaria para situarlo en dicha órbita y el momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra.

Datos: G = 6,67·10^{-11} N·m^2/Kg^2; M_T = 6,0·10^{24} kg; R_T = 6400 km.

a) $$\left|\vec{F}_G\right| = \left|\vec{F}_C\right| \quad \Rightarrow \quad G\frac{M_T m}{R^2} = m\frac{v^2}{R} \qquad v = \frac{2\pi R}{T} \quad \Rightarrow \quad G\frac{M_T}{R^2} = \frac{4\pi^2 R^2}{T^2 R}$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{G\,M_T\,T^2}{4\pi^2}} = 42297523{,}87\ \text{m} \cong 42297{,}5\ \text{km} \qquad (R = 42{,}3 \cdot 10^6\ m)$$

b) *Energía mecánica total del satélite en la órbita:*

$$\left.\begin{array}{l} Em_{orb} = Ec_{orb} + Ep_{orb} = \dfrac{1}{2}m v^2 - G\dfrac{M_T\,m}{R} \\ v^2 = G\dfrac{M_T}{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad Em_{orb} = -\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{R}$$

Energía inicial en la superficie de la Tierra: $Em_o = -G\dfrac{M_T m}{R_T}$

$$\Delta E = Em_{orb} - Em_o = -\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{R} + G\frac{M_T m}{R_T} = G M_T m\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2R}\right)$$

$$\Delta E = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 100\left(\frac{1}{6{,}4 \cdot 10^6} - \frac{1}{2 \cdot 42{,}3 \cdot 10^6}\right) = 5{,}78 \cdot 10^9\ \text{J}$$

c) *velocidad del satélite en la órbita:* $v=\sqrt{\dfrac{GM_T}{R}} = \sqrt{\dfrac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot6\cdot10^{24}}{42{,}3\cdot10^{6}}}$ = 3076 m/s

$|\vec{L}| = mRv =$ 100 · 42,3 · 10^6 · 3076 = 1,3 · 10^{13} kg m^2 /s

3 (*Asturias 2008*).- Un satélite de 3000 kg de masa gira en torno a la Tierra siguiendo una órbita circular de radio 9500 km.
a) Calcula la fuerza gravitatoria que actúa sobre el satélite.
b) Calcula su energía mecánica total.
c) ¿Cuánta energía hay que proporcionar al satélite para que escape de la atracción gravitatoria de la Tierra?
Datos: Considera que la energía potencial tiende a cero cuando la distancia tiende al infinito. $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ $N\cdot m^2/Kg^2$; $M_T = 6{,}0\cdot10^{24}$ *kg.*

a) Fuerza gravitatoria que actúa sobre el satélite. $F_G = G\dfrac{M_T m}{R^2}$ R = 9,5 · 10^6 m

$$F_G = 6{,}67\cdot10^{-11}\,\frac{6\cdot10^{24}\cdot3000}{\left(9{,}5\cdot10^{6}\right)^2} = 13303{,}05\ \text{N}$$

b) Energía mecánica total del satélite en la órbita.

$$\left.\begin{aligned} Em_{orb} = Ec_{orb} + Ep_{orb} &= \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_T\,m}{R} \\ v^2 = G\frac{M_T}{R} & \end{aligned}\right\} \Rightarrow Em_{orb} = -\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{R}$$

$$Em_{orb} = -\frac{1}{2}6{,}67\cdot10^{-11}\,\frac{6\cdot10^{24}\cdot3000}{9{,}5\cdot10^{6}} = -6{,}32\cdot10^{10}\ \text{J}$$

c) *Si el satélite escapara hasta un punto en el infinito, donde ya no sea atraído por la Tierra, su energía potencial sería nula:* $Ep = -\dfrac{1}{2}G\dfrac{M_T m}{R}$ *tiende a cero si R tiende a infinito. También se anula la energía cinética, pues supondremos que el satélite llega hasta ese punto y queda en reposo.* $E_{mecánica\ total} = 0$

La energía se conserva: $Em_{orb} + E_{suplementaria} = E_{mecánica\ total} = 0$

$-6{,}32\cdot10^{10} + E_{sup} = 0$ E_{sup} = 6,32 · 10^{10} J

4 (*Baleares 2008*).- Considera un satélite artificial de 950 kg de masa con una órbita alrededor de la Tierra contenida en el plano del ecuador.
a) ¿A qué distancia de la Tierra ha de estar el satélite para que la órbita sea geoestacionaria (T = 24 h)?
b) ¿Cuánto vale el momento angular de este satélite geoestacionario?
c) ¿Cuál es la velocidad en el perigeo de otro satélite de igual masa si su órbita elíptica tiene el apogeo a 36500 km y el perigeo a 8200 km del centro de la Tierra?

a) $|\vec{F}_G| = |\vec{F}_C| \Rightarrow G\dfrac{M_T m}{R^2} = m\dfrac{v^2}{R}$ $v = \dfrac{2\pi R}{T}$ $\Rightarrow G\dfrac{M_T}{R^2} = \dfrac{4\pi^2 R^2}{T^2 R}$

$R = \sqrt[3]{\dfrac{G M_T T^2}{4\pi^2}}$ = 42297523,87 m ≅ 42297,5 km *(R = 4,23·10^7 m)*

d = R – R_T = 42297,5 – 6370 = 35927,5 km

b) : $v=\sqrt{\dfrac{GM_T}{R}} = \sqrt{\dfrac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot6\cdot10^{24}}{4{,}23\cdot10^{7}}}$ = 3076 m/s

$|\vec{L}| = mRv =$ 950 · 4,23 · 10^7 · 3076 = 1,233 · 10^{14} kg m^2 /s

c) ¿Cuál es la velocidad en el perigeo de otro satélite de igual masa si su órbita elíptica tiene el apogeo a 36500 km y el perigeo a 8200 km del centro de la Tierra?

Segunda ley de Kepler: $|\vec{L}| = mRv =$ cte. $\quad mR_a v_a = mR_p v_p \quad v_a = \dfrac{R_p}{R_a} v_p$

Conservación de la energía mecánica:

$$Em_p = Em_a \Rightarrow \frac{1}{2} m v_p{}^2 - G\frac{M_T\, m}{R_p} = \frac{1}{2} m v_a{}^2 - G\frac{M_T\, m}{R_a}$$

$$v_p{}^2 - v_a{}^2 = 2\cdot G\cdot M_T\cdot\left(\frac{1}{R_p}-\frac{1}{R_a}\right) \qquad v_p{}^2 - \left(\frac{R_p}{R_a}v_p\right)^2 = 2\cdot G\cdot M_T\cdot\left(\frac{1}{R_p}-\frac{1}{R_a}\right)$$

$$v_p{}^2\left(1-\frac{R_p{}^2}{R_a{}^2}\right) = 2\cdot G\cdot M_T\cdot\left(\frac{1}{R_p}-\frac{1}{R_a}\right) \qquad v_p{}^2 = 2\cdot G\cdot M_T\cdot\left(\frac{R_a-R_p}{R_aR_p}\right)\left(\frac{R_a{}^2}{R_a{}^2-R_p{}^2}\right)$$

$$v_p{}^2 = 2\cdot G\cdot M_T\cdot\left(\frac{R_a-R_p}{R_aR_p}\right)\left(\frac{R_a{}^2}{(R_a+R_p)(R_a-R_p)}\right) \qquad v_p{}^2 = 2\cdot G\cdot M_T\cdot\frac{R_a}{R_p(R_a+R_p)}$$

$$v_p = \sqrt{2\cdot G\cdot M_T\cdot\frac{R_a}{R_p(R_a+R_p)}}$$

$$v_p = \sqrt{2\cdot6{,}67\cdot10^{-11}\cdot6\cdot10^{24}\cdot\frac{36{,}5\cdot10^{6}}{8{,}2\cdot10^{6}(36{,}5\cdot10^{6}+8{,}2\cdot10^{6})}} = 8927{,}5 \text{ m/s}$$

5 (Canarias 2008).- Un pequeño planeta de masa 3,0·1024 kg y radio 3000 km tiene un satélite a una altura de 3·105 km sobre la superficie del planeta. El satélite se mueve en una órbita circular con una masa de 200 kg. Calcula:
a) La aceleración de la gravedad sobre la superficie del planeta.
b) La fuerza gravitatoria que ejerce el planeta sobre el satélite.
c) La velocidad del satélite.
Datos: G = 6,67·10 $^{-11}$ N·m^2/Kg^2

6 (Cantabria 2008).- a) Halla la aceleración de la gravedad en la superficie de la Luna.
b) Halla la velocidad de escape en la superficie de la Luna.
Datos: M_L = 0,012·M_T; R_L = 0,27 · R_T; g_T = 9,8 m/s^2; v_{Escape} (T)= 11,2 km/s

7 (Cantabria 2008).- Un satélite artificial describe dos vueltas alrededor de la Tierra cada 24 h, en una órbita circular. a) Halla el período de su movimiento orbital en segundos. b) Calcula la altura sobre la superficie terrestre. c) Calcula la velocidad del satélite.
Datos: G = 6,67·10 $^{-11}$ N·m^2/Kg^2; M_T = 6,0·10^{24} kg; R_T = 6400 km