1 (*Andalucía 2007*).- Supón que la masa de la Tierra se duplicara:
a) Calcula razonadamente el nuevo período orbital de la Luna, suponiendo que su radio orbital permaneciera constante.
b) Si, además de duplicarse la masa terrestre, se duplicase su radio, ¿cuál sería el valor de g en la superficie terrestre?
Datos: $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ N\cdot m^2\cdot kg^{-2}$; $M_T = 6\cdot 10^{24}\ kg$; $R_T = 6370\ km$;
$R_{orbital\ Luna} = 1{,}74\cdot 10^6\ m$.

a) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R^3}{G\cdot M_T}}$ *Si la masa de la Tierra se duplica:* $T' = 2\pi\sqrt{\dfrac{R^3}{G\cdot 2M_T}}$

$$\frac{T'}{T} = \frac{2\pi\sqrt{\dfrac{R^3}{G\cdot 2M_T}}}{2\pi\sqrt{\dfrac{R^3}{G\cdot M_T}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad T' = \frac{T}{\sqrt{2}}$$

b) $g = \dfrac{G\cdot M_T}{R_T^{\ 2}}$ *Si la masa y el radio de la Tierra se duplican:* $g' = \dfrac{G\cdot 2M_T}{(2R_T)^2}$

$$\frac{g'}{g} = \frac{\dfrac{G\cdot 2M_T}{(2R_T)^2}}{\dfrac{G\cdot M_T}{R_T^{\ 2}}} = \frac{1}{2} \qquad g' = \frac{g}{2}$$

2 (*Aragón 2007*).- La relación entre los radios medios de las órbitas de Marte y la Tierra en torno al Sol es $R_M/R_T = 1{,}53$. Calcula el período de la órbita de Marte en torno al Sol. (Duración de un año marciano).

Tercera ley de Kepler: $\dfrac{T_M^{\ 2}}{T_T^{\ 2}} = \dfrac{R_M^{\ 3}}{R_T^{\ 3}} \rightarrow \dfrac{T_M^{\ 2}}{365^2} = \left(\dfrac{R_M}{R_T}\right)^3$

$T_M^{\ 2} = 365^2\cdot 1{,}53^3 \rightarrow T_M = 690{,}76$ *días*

3 (*Asturias 2007*).- Un satélite realiza una órbita circular de radio 12756 *km* en torno a la Tierra en un tiempo de 4 *horas*. ¿Qué radio tendría la órbita de un satélite cuyo período sea 1 *día*?

Tercera ley de Kepler: $\dfrac{T_1^{\ 2}}{T_2^{\ 2}} = \dfrac{R_1^{\ 3}}{R_2^{\ 3}} \rightarrow R_2 = R_1\sqrt[3]{\dfrac{T_2^{\ 2}}{T_1^{\ 2}}} = 12756\sqrt[3]{\dfrac{24^2}{4^2}} = 12756\cdot\sqrt[3]{36}$

$R_2 = 42095\ km$

4 (*Asturias 2007*).- Plutón recorre una órbita elíptica en torno al Sol, situándose a una distancia r_p = 4,4·10^{12} *m* en el punto más próximo (perihelio) y r_a = 7,7·10^{12} *m* en el punto más alejado (afelio):

a) Obtén el valor de la energía potencial gravitatoria de Plutón en el perihelio y en el afelio.

b) ¿En cuál de estos dos puntos será mayor la velocidad de Plutón? Razónalo.

Datos: Considera que la energía potencial tiende a cero cuando la distancia tiende a infinito; $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ N\cdot m^2\cdot kg^{-2}$; $M_{Sol} = 1{,}98\cdot 10^{30}\ kg$; $M_{Plutón} = 1{,}27\cdot 10^{22}\ kg$

a) $$Ep_p = -G\frac{Mm}{R_p} = -6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{1{,}98\cdot 10^{30}\cdot 1{,}27\cdot 10^{22}}{4{,}4\cdot 10^{12}} = -3{,}81\cdot 10^{29}\,J$$

$$Ep_a = -G\frac{Mm}{R_a} = -6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{1{,}98\cdot 10^{30}\cdot 1{,}27\cdot 10^{22}}{7{,}7\cdot 10^{12}} = -2{,}178\cdot 10^{29}\,J$$

b) *La velocidad es mayor en el perihelio. Según la segunda Ley de Kepler (El radio vector que une el planeta con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales), el momento angular* $\vec{L}$ *permanece constante.*

$$\vec{L} = \vec{r}\wedge m\vec{v} \qquad \left|\vec{L}\right| = r\,m\,v\,sen90^{o} = r\,m\,v$$

$$r_a\cdot m\cdot v_a = r_p\cdot m\cdot v_p \quad \Rightarrow \quad \frac{v_p}{v_a} = \frac{r_a}{r_p} > 1$$

5 (*Aragón 2007*).- La órbita de Plutón en torno al Sol es notablemente excéntrica. La relación de distancias máxima y mínima entre su centro y el del Sol (en el afelio y en el perihelio) es R_a/R_p = 5/3. Razonando tu respuesta, calcula la relación entre los valores en el afelio y en el perihelio de las siguientes magnitudes de Plutón:

a) Momento angular respecto al centro del Sol.

b) Energía cinética.

c) Energía potencial gravitatoria.

a) $$\vec{L} = \vec{r}\wedge m\vec{v} \qquad \left|\vec{L}\right| = r\,m\,v\,sen90^{o} = r\,m\,v$$

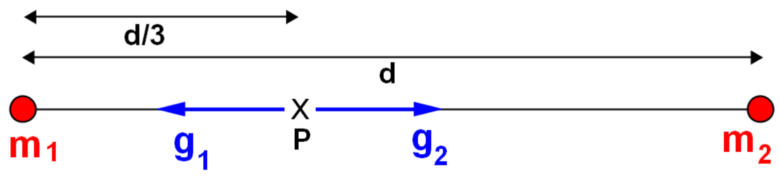
$$2^a\ \text{Ley de Kepler:}\ \ \vec{L} = cte \quad\Rightarrow\quad \left|\vec{L_a}\right| = \left|\vec{L_p}\right| \quad\Rightarrow\quad m\,r_a v_a = m\,r_p v_p$$

b) $$m\,r_a v_a = m\,r_p v_p \quad\Rightarrow\quad r_a v_a = r_p v_p \quad\Rightarrow\quad \frac{v_p}{v_a} = \frac{r_a}{r_p} = \frac{5}{3} \quad\Rightarrow\quad v_a = \frac{3}{5}v_p$$

$$\left.\begin{array}{l} Ec_a = \frac{1}{2}mv_a^{\,2} = \frac{1}{2}m\left(\frac{3}{5}v_p\right)^2 \\ Ec_p = \frac{1}{2}mv_p^{\,2} \end{array}\right\} \Rightarrow Ec_a = \frac{9}{25}Ec_p$$

c) $$\left.\begin{array}{l} Ep_a = -G\frac{Mm}{r_a} = -G\frac{Mm}{\frac{3}{5}r_p} = -3G\frac{Mm}{5r_p} \\ Ep_p = -G\frac{Mm}{r_p} \end{array}\right\} \Rightarrow Ep_a = \frac{3}{5}Ep_p$$

6 (*Baleares 2007*).- El campo gravitatorio creado por dos masas, m_1 y m_2, que podemos considerar puntuales y separadas una distancia d, se anula a $d/3$ de la masa m_1. ¿Cuánto vale la relación entre las masas, m_1/m_2?



$$\vec{g}_1+\vec{g}_2=0 \Rightarrow |\vec{g}_1|=|\vec{g}_2| \qquad g=\frac{G\cdot m}{d^2}$$

$$|\vec{g}_1|=|\vec{g}_2| \Rightarrow \frac{G\cdot m_1}{\left(\frac{d}{3}\right)^2}=\frac{G\cdot m_2}{\left(\frac{2d}{3}\right)^2} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2}=\frac{1}{4}$$

7 (*Baleares 2007*).- La masa de la Luna es, aproximadamente, $7{,}35\cdot10^{22}$ *kg*, y su radio $1{,}7\cdot10^{6}$ *m*.

a) ¿Cuanto pesará en la superficie de la Luna una persona de 70 *kg*?

b) ¿Cuánto podrá saltar, en altura, esta persona en la superficie de la Luna si en la Tierra salta 1 *m*?

Datos: $G = 6{,}67\cdot10^{-11}\ N\cdot m^2\cdot kg^{-2}$; $g = 9{,}8\ m\cdot s^{-2}$

a)

$$P = m\cdot g_L$$

$$g_L=G\frac{M_L}{R_L^2}=6{,}67\cdot10^{-11}\frac{7{,}35\cdot10^{22}}{\left(1{,}7\cdot10^{6}\right)^2}=1{,}7\ m/s^2$$

$$P = 70\cdot 1{,}7 = 119\ N$$

b)

Suponiendo que inicia el salto con la misma energía cinética, alcanzará la misma energía potencial $E_p = mgh$

$$m\,g_T\,h_T = m\,g_L\,h_L \qquad h_L=\frac{g_T\cdot h_T}{g_L}=\frac{9{,}8\cdot 1}{1{,}7}=5{,}76\ m$$

8 (*Castilla-La Mancha 2007*).- Calcula la distancia al centro de la Tierra de un punto donde la aceleración de la gravedad vale $g/4$.

Dato: Radio terrestre, $R_T = 6{,}37\cdot10^{6}\ m$.

En la superficie terrestre $\quad g=\dfrac{G\cdot M_T}{R_T^2}$

En el punto a una distancia R $\quad \dfrac{g}{4}=\dfrac{G\cdot M_T}{R^2}$

Dividiendo ambas expresiones: $\quad 4=\dfrac{R^2}{R_T^2}\Rightarrow R^2=4R_T^2\Rightarrow R=2\,R_T$

$$R = 1{,}274\cdot10^{7}\ m$$