1.- El satélite Europa tiene un período de rotación alrededor de Júpiter de 85 horas y su órbita, prácticamente circular, tiene un radio de $6'67.10^5$ km. Calcula la masa de Júpiter.

T = 85 h = $3'06 \cdot 10^5$ s; R = $6'67 \cdot 10^8$ m; G = $6'67 \cdot 10^{-11}$ U.I.

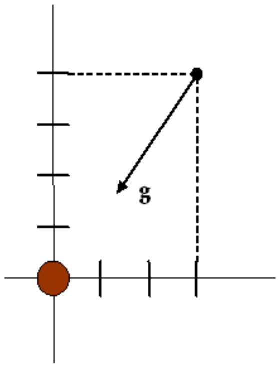
$$\left|\vec{F}_G\right| = \left|\vec{F}_C\right| \qquad G\frac{M_J \cdot m_s}{R^2} = m_s \frac{{v_s}^2}{R} \qquad v_s = \frac{2\pi R}{T}$$

$$\frac{G \cdot M_J}{R} = \frac{4\pi^2 R^2}{T^2} \quad \Rightarrow \quad M_J = \frac{4\pi^2 R^3}{G\,T^2} = \quad 1'88 \cdot 10^{27}\ \text{kg}$$

2.- Una masa puntual de 50 kg está situada en el origen de coordenadas. Calcula:

a) El campo gravitatorio en el punto (3, 4) m.
b) La fuerza que actuaría sobre una masa de 20 kg al situarla en ese punto.
c) El potencial gravitatorio en ese punto.
d) La energía potencial gravitatoria que adquiere una masa de 20 kg al situarse en ese punto.

a) $r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\,m$



$$\left|\vec{g}\right| = G\frac{m}{r^2} = 6'67 \cdot 10^{-11}\frac{50}{5^2} = 1'334 \cdot 10^{-10}\ N/kg$$

$$g_x = \left|\vec{g}\right| \cdot \cos\alpha = \left|\vec{g}\right| \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -8 \cdot 10^{-11}\,N/kg$$

$$g_y = \left|\vec{g}\right| \cdot sen\,\alpha = \left|\vec{g}\right| \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -1'067 \cdot 10^{-10}\,N/kg$$

$$\vec{g} = -8 \cdot 10^{-11}\,\vec{i} - 1'067 \cdot 10^{-10}\,\vec{j} \quad N/kg$$

(NOTA: las unidades de ***g*** son *N/kg* o, también, m/s^2)

b) $\vec{F} = m' \cdot \vec{g} = 20\left(-8 \cdot 10^{-11}\,\vec{i} - 1'067 \cdot 10^{-10}\,\vec{j}\right) = -1'6 \cdot 10^{-9}\,\vec{i} - 2'13 \cdot 10^{-9}\,\vec{j} \quad N$

$\left|\vec{F}\right| = m' \cdot \left|\vec{g}\right| = 20 \cdot 1'334 \cdot 10^{-10} = 2'668 \cdot 10^{-9} \quad N$

c)

$$V_A = -G\frac{m}{r} ?- 6'67 \cdot 10^{-11}\frac{50}{5} = -6'67 \cdot 10^{-10} \quad J/kg$$

d)

$$E_{pA} = -G\frac{m \cdot m'}{r} = -6'67 \cdot 10^{-11}\frac{50 \cdot 20}{5} = -1'334 \cdot 10^{-8} \quad J$$

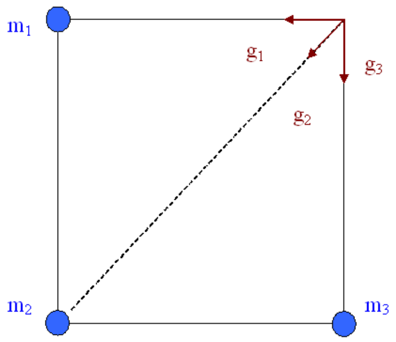
o también:

$$E_{pA} = m' \cdot V_A = 20 \cdot (-6'67 \cdot 10^{-10}) = -1'334 \cdot 10^{-8} \quad J$$

3.- En tres vértices de un cuadrado de 5 m de lado se disponen otras tantas masas de 20 kg. Calcula:

a) El campo gravitatorio en el cuarto vértice.

b) El trabajo realizado por el campo para llevar un cuerpo de 12 kg desde dicho vértice al centro del cuadrado.



$$r_1 = r_3 = 5\,m \qquad r_2 = \sqrt{5^2+5^2} = 5\sqrt{2}\,m$$

$$\left|\overrightarrow{g_1}\right| = G\frac{m_1}{r_1^2} = 6'67\cdot 10^{-11}\frac{20}{5^2} = 5'34\cdot 10^{-11} \quad m/s^2$$

$$\left|\overrightarrow{g_2}\right| = G\frac{m_2}{r_2^2} = 2'67\cdot 10^{-11}\ m/s^2$$

$$\left|\overrightarrow{g_3}\right| = \left|\overrightarrow{g_1}\right| = 5'34\cdot 10^{-11}\ m/s^2$$

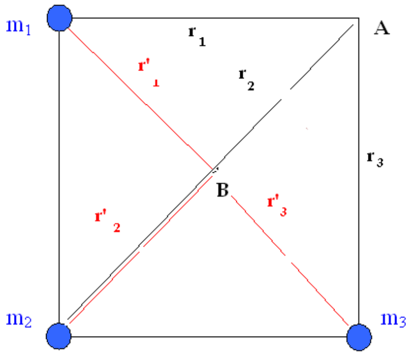
$$\overrightarrow{g_1} = \left(-5'34\cdot 10^{-11}, 0\right) m/s^2 \qquad \overrightarrow{g_3} = \left(0, -5'34\cdot 10^{-11}\right) m/s^2$$

$$\overrightarrow{g_2} = \left(-g_2\cos 45, -g_2 sen45\right) = \left(-1'89\cdot 10^{-11}, \quad -1'89\cdot 10^{-11}\right) \quad m/s^2$$

$$\overrightarrow{g_R} = \overrightarrow{g_1} + \overrightarrow{g_2} + \overrightarrow{g_3} = \left(-7'23\cdot 10^{-11}, \quad -7'23\cdot 10^{-11}\right) \quad m/s^2 \qquad \left|\overrightarrow{g_R}\right| = 1'02\cdot 10^{-10}\ m/s^2$$

b)

$$W_{A\to B} = m'\left(V_A - V_B\right) \qquad r_1 = r_3 = 5\,m \qquad r_2 = 5\sqrt{2}\,m$$



$$m_1 = m_2 = m_3 = m = 20\,kg$$

$$V_A = -G\frac{m_1}{r_1} - G\frac{m_2}{r_2} - G\frac{m_3}{r_3} = -Gm\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)$$

$$V_A = -6'67\cdot 10^{-11}\cdot 20\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5\sqrt{2}}+\frac{1}{5}\right) = -7'22\cdot 10^{-10}\ J/kg$$

$$r'_1 = r'_2 = r'_3 = 5\frac{\sqrt{2}}{2}\ m = r'$$

$$V_B = -G\frac{m_1}{r'_1} - G\frac{m_2}{r'_2} - G\frac{m_3}{r'_3} = -3\frac{G\cdot m}{r'} = -1'132\cdot 10^{-9}\ J/kg$$

$$W_{A\to B} = m'\left(V_A - V_B\right) = 12\left(-7'22\cdot 10^{-10} + 1'132\cdot 10^{-9}\right) = 4'92\cdot 10^{-9}\ J$$

4.- Para los planetas del Sistema Solar, según la tercera ley de Kepler, la relación R^3/T^2 es constante y vale $3'35\cdot 10^{18} m^3/s^2$, siendo R el radio de sus órbitas y T el período de rotación. Suponiendo que las órbitas sean circulares, calcular la masa del Sol.

Velocidad del planeta en su órbita (v de traslación): $v = \dfrac{2\pi R}{T}$

Equilibrio de fuerzas del planeta en su órbita: $\left|\overrightarrow{F_G}\right| = \left|\overrightarrow{F_C}\right|$

$$G\frac{M_S\cdot m}{R^2} = m\frac{v^2}{R} \quad\Rightarrow\quad \frac{G\cdot M_S}{R} = \frac{4\pi^2 R^2}{T^2} \quad\Rightarrow\quad M_S = \frac{4\pi^2}{G}\cdot\frac{R^3}{T^2}$$

Donde $\boldsymbol{M_S}$ *es la masa del Sol y* ***m*** *la del planeta.*

$$M_S = \frac{4\pi^2}{6'67\cdot 10^{-11}}\cdot 3'35\cdot 10^{18} = 1'98\cdot 10^{30}\ kg$$

5.- Se desea colocar en órbita un satélite de comunicaciones, de forma que se encuentre siempre sobre el mismo punto de la superficie terrestre (órbita "geoestacionaria"). Si la masa del satélite es de 1500 kg, se pide calcular:

a) La altura de la superficie terrestre a la que hay que situar el satélite.

Equilibrio de fuerzas del satélite en su órbita: $\left|\vec{F}_G\right| = \left|\vec{F}_C\right|$

$$G\frac{M_T \cdot m}{R^2} = m\frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{G \cdot M_T}{R} = \frac{4\pi^2 R^2}{T^2} \quad \Rightarrow \quad GM_T T^2 = 4\pi^2 R^3$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}} = 4'225 \cdot 10^7 \text{ m} \qquad R = R_T + h \quad \Rightarrow \quad h = R - R_T = 3'59 \cdot 10^7 \text{ m}$$

b) La energía total del satélite cuando se encuentre en órbita.

$$E_T = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_T m}{R} = \frac{1}{2}m\frac{GM_T}{R} - G\frac{M_T m}{R} = -\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{R}$$

$$E_T = -\frac{1}{2}6'67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5'98 \cdot 10^{24} \cdot 1500}{4'225 \cdot 10^7} = -7'08 \cdot 10^9 \text{ J}$$