CÁLCULO VECTORIAL

Escalares y vectores.

Al estudiar la Física nos encontramos con dos tipos diferentes de magnitudes físicas: magnitudes escalares y magnitudes vectoriales.Son magnitudes escalares aquellas que quedan definidas sin ambigüedad por un número y su unidad correspondiente, por ejemplo la temperatura. Llamamos vectoriales a las magnitudes que además necesitan de una dirección y un sentido para su definición, por ejemplo la fuerza, la velocidad…Para representar a este último tipo de magnitudes se utilizan los vectores,

Un vector está representado por cuatro elementos: *origen, dirección, sentido y módulo.*

Origen. es el punto de aplicación del vector.
Dirección. La misma que tiene la recta (directriz) sobre la que está el vector. A cada dirección le corresponden dos sentidos.
Sentido. El indicado por la cabeza de la flecha.
Módulo. El valor numérico de la magnitud representada, expresado por la longitud del vector. El módulo de un vector se indica con barras verticales.

Los vectores se suelen representar por una letra y una flecha encima. En este caso los voy a representar en negrita y sin flecha.

En Física, consideramos tres tipos de vectores: a) vectores fijos o ligados, b) vectores deslizantes; c) vectores libres.

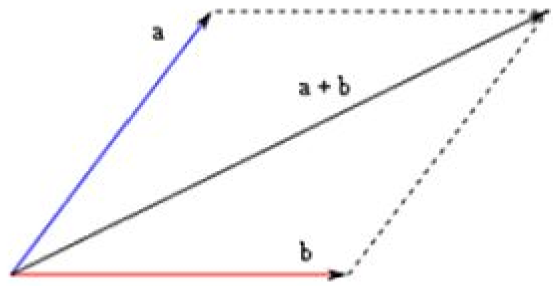
1. *Vector fijo. E*s un vector que tiene su punto de aplicación perfectamente definido, siendo este un punto fijo en el espacio.
2. *Vector deslizante.* Es un vector que se puede desplazar sobre la recta que lo soporta, siendo su punto de aplicación cualquier punto de ella.
3. *Vector libre.* Es todo vector que manteniendo fija su dirección, se puede colocar con origen en cualquier punto del espacio.

Cuando dos vectores libres tienen igual módulo y las rectas sobre las que están situados son paralelas, es decir tienen la misma dirección, decimos que los vectores son equipolentes.

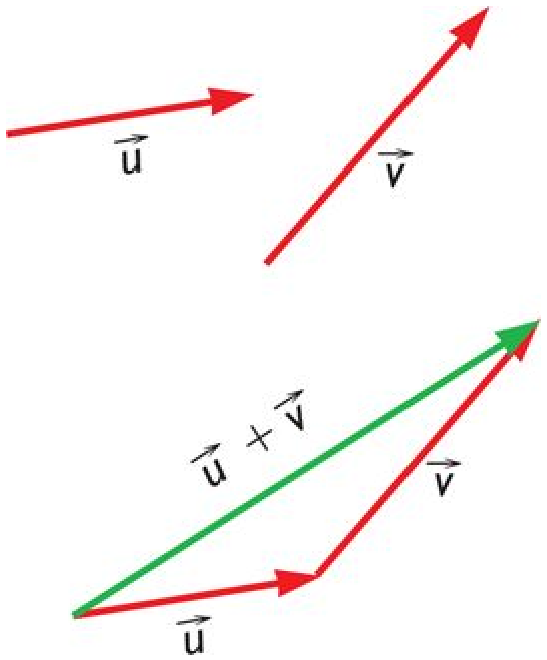
Suma de vectores. Método gráfico.

La suma de dos vectores, gráficamente se obtiene mediante la regla del paralelogramo o la del polígono.

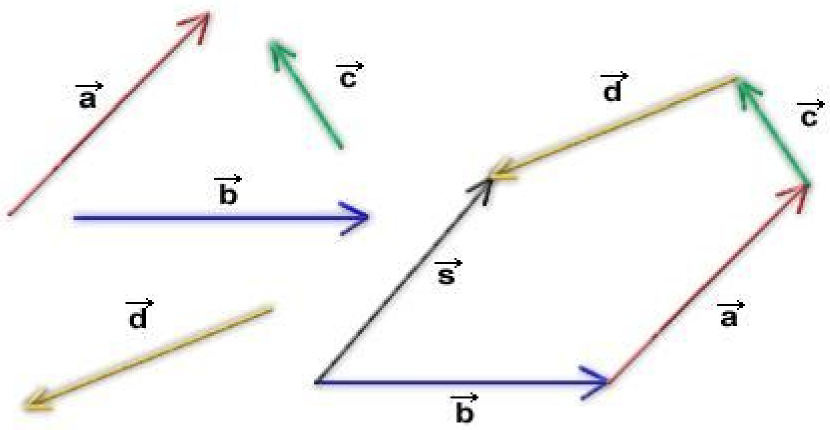
La regla del paralelogramo para vectores concurrentes (mismo origen) consiste en trazar por el extremo del primer vector una recta paralela al segundo vector y por el extremo del segundo, una paralela al primero. El punto de corte nos dará el extremo del vector suma, con el mismo origen que los que sumamos.



La regla del polígono consiste en trasladar el origen del segundo vector al extremo del primero, y el vector suma será el que tiene como origen, el origen del primero y como extremo el extremo del segundo.



Si tenemos que sumar varios vectores es más conveniente utilizar la regla del polígono.



Las propiedades de la suma son:

Conmutativa: **a + b = b + a**

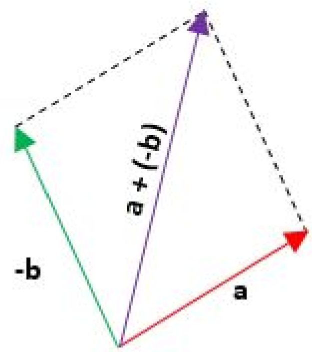
Asociativa: **a + (b + c) = (a + b) + c**

Diferencia de vectores.

La diferencia de vectores gráficamente se realiza como la suma, teniendo en cuenta que restar un vector es sumar el opuesto.

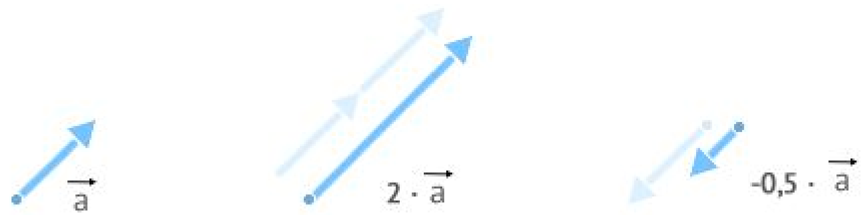
El opuesto de un vector es un vector del mismo módulo, la misma dirección y sentido opuesto.

a - b = a + (- b)



Producto de un escalar por un vector.

El producto de un escalar *k* por un vector **a** es otro vector **p** de la misma dirección que **a** y cuyo módulo es el producto de *k* por el del vector **a**. El sentido de **p** será el de **a** si *k* es positivo y el contrario si *k* es negativo.



Producto de $\vec{a}$ por distintos escalares

A partir del producto de un escalar por un vector nos encontramos ante la noción de vector unitario a lo largo de una dirección.

Cualquier vector se puede expresar, en función de su vector unitario, de la siguiente forma.

a = a · **u.**

Si despejamos **u**, tenemos **u** = **a**/a

Un vector unitario es aquel cuyo módulo es igual a la unidad.

Representación de un vector en el espacio. Expresión general. Cosenos directores.

Un vector en el plano venía dado por sus dos componentes, una según el eje X y la otra según el eje Y, ambas multiplicadas por su respectivo vector unitario.
Lo representamos así:

a = a_x·**i** + a_y·**j** = (a_x, a_y)

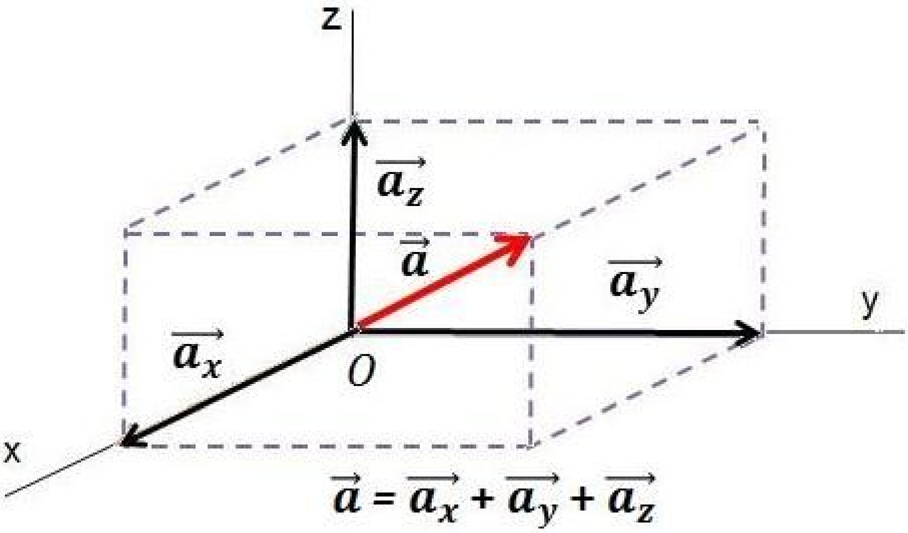
y el módulo era la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de sus componentes.

En el espacio, los vectores vienen dados por sus tres componentes, según los ejes X, Y y Z, multiplicadas por los correspondientes vectores unitarios

a = a_x·**i** + a_y·**j** + a_z·**k**,= (a_x, a_y, a_z)

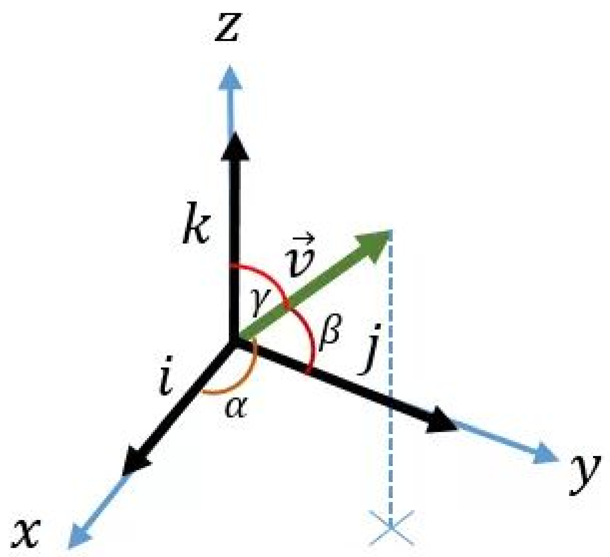
siendo **i**, **j** y **k** los vectores unitarios según los tres ejes.

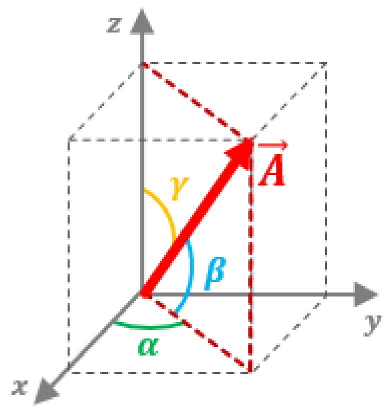
i = (1, 0, 0)
j = (0, 1, 0)
k = (0, 0,1)



El módulo de un vector en el espacio es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de sus tres componentes.

En los cálculos matemáticos se utilizan los *cosenos directores del vector*, que son los cosenos de los tres ángulos que el vector forma con los tres ejes y definen la posición del vector.





$\cos\alpha = a_x/a$, $\cos\beta = a_y/a$, $\cos\gamma = a_z/a$.

Se puede demostrar que la suma de los cuadrados de los cosenos directores de un vector es igual a la unidad.
Por lo tanto los cosenos directores coinciden con las tres componentes del vector unitario en la dirección del vector considerado.

Suma de vectores. Método analítico.

Para sumar vectores dados por sus componentes los sumaremos componente a componente y el vector suma tendrá como componente x, la suma de las componentes x de los vectores que sumamos, y lo mismo con las componentes y y z.

Dados los vectores a, b y c

$\mathbf{a} = a_x \cdot\mathbf{i} + a_y \cdot\mathbf{j} + a_z\cdot\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_x\cdot\mathbf{i} + b_y\cdot\mathbf{j} + b_z\cdot\mathbf{k}$ y $\mathbf{c} = c_x\cdot\mathbf{i} + c_y\cdot\mathbf{j} + c_z\cdot\mathbf{k}$, que también se pueden escribir como,

$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$; $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ y $\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$, el vector suma será:

$\mathbf{s} = (a_x + b_x + c_x)\cdot\mathbf{i} + (a_y + b_y + c_y)\cdot\mathbf{j} + (a_z + b_z + c_z)\cdot\mathbf{k}$ o expresado en función de las componentes:

$\mathbf{s} = (a_x + a_y + a_z, b_x + b_y + b_z, c_x + c_y + c_z)$

Producto escalar de dos vectores.

Dados los vectores a y b, se define el producto escalar como:

a·b = a·b·cos α , siendo α el ángulo que forman los vectores **a** y **b**

Propiedades

a) El producto escalar es conmutativo:

   a·b = b·a

b) El producto escalar es distributivo por la derecha y por la izquierda:

   a·(b + c) = (b + c)·a

Expresión analítica del producto escalar

Habitualmente los vectores vendrán dados en la forma general. Vamos a obtener el producto de dos vectores a y b a partir de ella.

dados los vectores:

a = a_x·**i** + a_y·**j** + a_z·***k*** y
b = b_x·**i** +b_y·**j** +b_z·**k**

tendremos:
a·b = (ax·**i** +ay·**j** + az·**k**)·(bx·**i** + by·**j** + bz·**k**) = a_xb_x·**i·i** + a_xb_y·**i·j** + a_xb_z·**i·k** + a_yb_x·**j·i** + a_yb_y·**j**·j +a_yb_z·**j·k** + a_zb_x·**k·i** + a_zb_y·**k·j** +a_zb_z·**k·k**

En este desarrollo aparecen los productos escalares de los vectores unitarios. veamos su resultado.
i·i = i·i cos oº =1·1·1 = 1

por lo tanto **j·j** y **k·k** también darán la unidad, ya que el ángulo que forma un vector consigo mismo es cero. En resumen,

i·i = j·j = k·k = 1

Veamos los otros productos escalares:

i·j = i·j·cos 90º = 1·1·0 = 0

Si los vectores unitarios que multiplicamos escalarmente son distintos siempre el resultado será nulo ya que el ángulo formado será de 90º.
Por lo tanto:

i·j = i·k = j·i = j·k = k·i = k·j = 0

por lo que el producto escalar nos dará:

a·b = $a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$

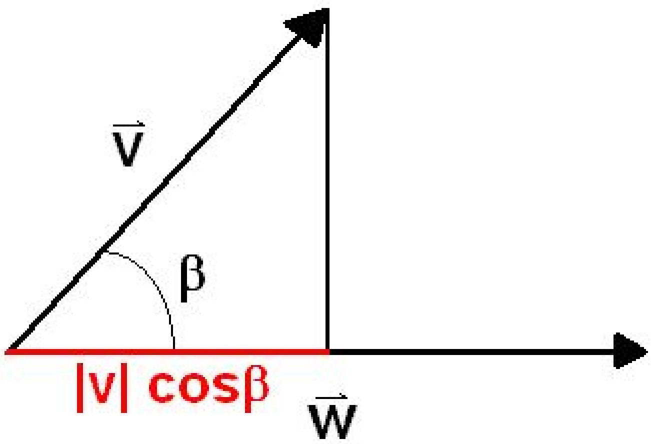
El producto escalar siempre será un escalar, es decir un número, **nunca un vector.**

El producto escalar de dos vectores perpendiculares siempre será cero ya que el coseno de 90º es cero.

El producto escalar nos permite conocer el ángulo que forman los dos vectores que multiplicamos. Solo tenemos que despejar el cos α en la expresión **a·b** = a·b·cos α

Aplicación geométrica del producto escalar.

La aplicación más frecuente es el cálculo de la proyección de un vector **v** sobre otro **w**



La proyección de v sobre w es lo indicado en rojo en la figura, y teniendo en cuenta la expresión del producto escalar, tenemos:

v·w = v·w·cos β

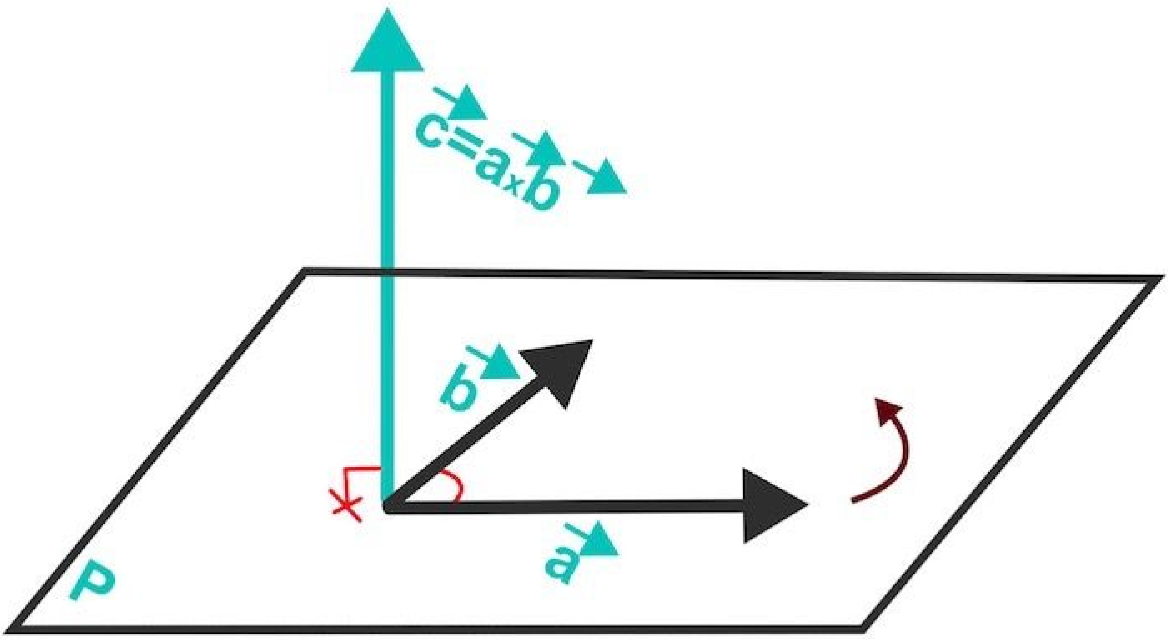
y si despejamos v·cos β nos queda:

v·cos β = **v·w**/w

Producto vectorial de dos vectores

El resultado del producto vectorial de dos vectores es un vector que tiene las siguientes características: su dirección es perpendicular al plano que determinan los dos vectores que multiplicamos; su sentido es el del avance de un tornillo al girarle desde el primer al segundo vector por el ángulo más pequeño, o por la regla de la mano derecha (el dedo índice señala al primer vector, el medio al segundo y el pulgar nos da el resultado) y su módulo es:

p = **a** x **b** = a·b·sen α



Propiedades

a) El producto vectorial no es conmutativo

a x **b = -b** x **a**

Se debe a que el valor del seno de ángulos opuestos son de signo contrario.

sen(- α) $= -sen\,(\alpha)$

b) El producto vectorial es distributivo, aunque no por ambos lados. Es decir, se cumple que:

a x **(b** + **c) = a** x **b + a** x **c**

(b + **c)** x **a = b** x **a + c** x **a**

pero no se cumple la igualdad de los dos primeros miembros:

a x **(b** + **c)** $\neq$ **(b** + **c)** x **a**

Expresión analítica del producto vectorial

Vamos a realizar el producto vectorial de dos vectores dados por sus componentes.

Sean los vectores:

a = a_x·**i** + a_y·**j** + a_z·***k***   y

b = b_x·**i** +b_y·**j** +b_z·**k**

p = **a** x **b** = (a_x·**i** + a_y·**j** + a_z·***k***) x (b_x·**i** +b_y·**j** +b_z·**k)** = a_xb_x·**i** x **i** + a_xb_y·**i** x **j** + a_xb_z·**i** x **k** +a_yb_x·**j** x **i** + a_yb_y·**j** x **j** + a_yb_z·**j** x **k** + a_zb_x·**k** x **i** + a_zb_y·**k** x **j** + a_zb_z·**k** x **k**

Vamos a calcular los productos vectoriales que aparecen en la expresión anterior

i x **i** = **j** x **j** = **k** x **k** = 0

ya que cada vector forma un ángulo de 0º consigo mismo y como el seno de este ángulo es cero estos productos serán nulos.

los otros productos los hallaremos teniendo en cuenta la definición de producto vectorial y obtenemos:

i x **j** = **k**, y por tener la propiedad anticonmutativa **j** x **i** = **-k**
j x **k** = **i**, y por lo mismo **k** x **j** = **-i**
k x **i** = **j**, y aplicando la misma propiedad **i** x **k** = **-j**

Es fácil recordar el resultado de estos productos vectoriales ya que si escribimos los vectores unitarios, **i**, **j**, **k**, **i**, **j** vemos que al multiplicar **i** por **j** nos da **k**, al multiplicar **j** por **k** nos da el siguiente, es decir **i** y si multiplicamos **k** por **i** obtenemos el siguiente, **j**. Si sabemos estos tres productos, los otros tres con los vectores en orden contrario, por no ser conmutativo el producto vectorial, nos darán como resultado el vector opuesto.

si sustituimos en el producto vectorial obtenemos:

a x **b** = (a_xb_z - a_zb_y)**i** + (a_zb_x - a_xb_z)**j** + (a_xb_y - a_yb_x)**k**

Esta expresión es más fácil de desarrollar por medio de un determinante.

$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k} \quad \text{y} \quad \vec{b} = b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{c}$$

Ejemplo:

$\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ y $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot \vec{k}$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = [1\cdot(-1)-(-3)\cdot 3]\cdot \vec{i} - [(-1)\cdot(-1)-(-3)\cdot 2]\cdot \vec{j} + [(-1)\cdot 3-(1\cdot 2)]\cdot \vec{k} = 8\vec{i} - 7\vec{j} - 5\vec{k}$$

Si permutamos los factores $\vec{b} \wedge \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$ y desarrollando

$$\vec{b} \wedge \vec{a} = -8\vec{i} + 7\vec{j} + 5\vec{k}$$

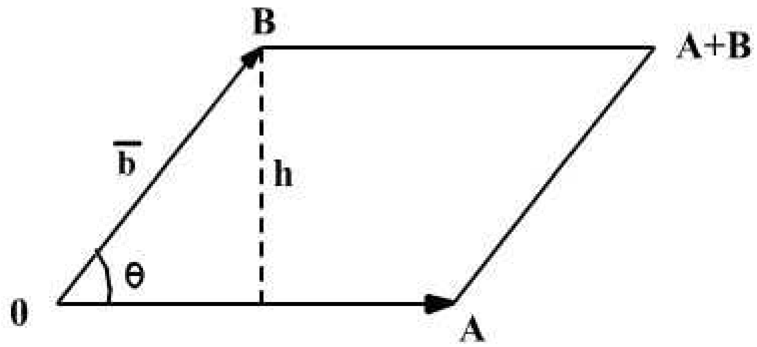
Los dos productos son dos vectores opuestos, cumpliendo la propiedad anticonmutativa del producto vectorial.

Este determinante está desarrollado por la primera fila. Cada elemento de la primera fila se multiplica por el determinante que resulta de eliminar la fila y la columna de ese elemento. Al quedarnos determinantes de dos filas y dos columnas , el resultado es el producto de los elementos de la diagonal que tiene el primer elemento de la primera fila y el segundo de la segunda menos el producto de los elementos de la otra diagonal. Hay que tener en cuenta que **i** y **k** mantienen el signo, pero **j** lo cambia.

Hasta el ejemplo he utilizado como signo del producto vectorial x, pero también se puede utilizar el del ejemplo.

Aplicación geométrica del producto vectorial

La aplicación más frecuente es el cálculo del área del paralelogramo definido por los dos vectores.
Primero hallaremos el área del triángulo de lados a y b, que es la mitad del área del paralelogramo.



La altura del triángulo es: $h = b \cdot sen\,\theta$

y por lo tanto, como el área del triángulo es: $A_t = 1/2(a.h)$, al sustituir h queda

$A = 1/2(a \cdot b \cdot sen\,\theta)$

y por lo tanto, al multiplicarla por 2, el área del paralelogramo queda $A_p = a \cdot b \cdot sen\,\theta$, que coincide con el módulo del producto vectorial de los vectores **a** y **b**.

Ejemplo resumen

Dados los vectores **a** (3, 4, 0) y **b** (4, 2, -4), determina:

a) Su suma.
b) El módulo y los cosenos directores de **a**.
c) El vector unitario en la dirección y sentido de **a**.
d) Si son perpendiculares.
e) El producto escalar.
f) La proyección de **a** sobre **b**.
g) El producto vectorial **a** x **b**.
h) El área del paralelogramo que determinan.

a) **s** = **a** + **b** = (3, 4, 0) + (4, 2, -4) = (3 + 4, 4 + 2, 0 - 4) = (7, 6, -4)
b) a = 5 u. es el resultado de la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las tres componentes del vector.
   cosenos directores
   $\cos\alpha = a_x/a$, $\cos\beta = a_y/a$ y $\cos\gamma = a_z/a$

   y en este caso:

   $\cos\alpha = 3/5$, $\cos\beta = 4/5$, $\cos\gamma = 0$

c) El vector unitario en la dirección de a, lo podemos hallar teniendo en cuenta que **a** = a·**u,** siendo **u** su vector unitario. Por lo tanto, **u** = **a**/a.

   u = (3, 4, 0)/5 = (3/5, 4/5, 0)

Como podemos comprobar, las componentes del vector unitario coinciden con los cosenos directores.

d) Para saber si dos vectores son perpendiculares hallamos su producto escalar y si el resultado es cero, los vectores serán perpendiculares.

a·**b** = (3, 4, 0) · (4, 2, -4) = 3·4 +4·2 + 0·(-4) = 20.

No son perpendiculares.

e) El producto escalar lo hemos hallado en el apartado anterior.

f) Para hallar la proyección de a sobre b, tendremos en cuenta que según nuestra figura sería a·cos α y como el producto escalar es **a**·**b** = a·b·cos α, al despejar a·cos α = **a**·**b**/b y en nuestro caso será : 20/6 = 10/3, ya que el módulo de b vale 6 u.

g) El producto vectorial **a** x **b** = (3, 4, 0) x (4, 2, -4) después de desarrollar el determinante es igual a 16·**i** + 12·**j** - 10·**k**

h) El área del paralelogramo es igual al módulo del producto vectorial. En nuestro caso la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las tres componentes del vector producto vectorial es igual a 22,36 u^2